第２講　三角関数

1　$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ および関係式

$$2\cos^2(\beta-\alpha)=3\sin(\beta-\alpha) \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす α，β に対して，$y=4\sin^2\beta-4\cos^2\alpha$ とおく。

(1)　$t=\sin(\beta-\alpha)$ とおくと，①から $t=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であることがわかる。

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{\boxed{ウ}}$ である。

（次ページに続く）

(2)　(1)により $\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから，加法定理を用いて，y を α で表すと

$$y=\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}\cos^2\alpha+\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\sin\alpha\cos\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

となる。このことから，$y=\boxed{\text{エ}}$ となるのは，$\alpha=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$，$\beta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$

のときである。

(3)　2 倍角の公式を用いると，②は

$$y=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\sin 2\alpha-\boxed{\text{サ}}\cos 2\alpha$$

となる。さらに，三角関数の合成を用いると

$$y=\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

と変形できる。このことから，$y=-\sqrt{3}$ となるのは，$\alpha=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソタ}}}$，$\beta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{チ}}}$

のときである。

2　$p=\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$，$q=\sin\left(\theta+\dfrac{4}{3}\pi\right)$ とおく。

(1)　三角関数の加法定理により

$$p=\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}\sin\theta+\frac{\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}\cos\theta \quad \cdots\cdots①$$

$$q=\frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}\sin\theta-\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}\cos\theta \quad \cdots\cdots②$$

である。

(2)　①，②により

$$pq=\sin^2\theta-\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}} \quad \cdots\cdots③$$

$$=\frac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}}\cos 2\theta-\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$$

である。

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $pq=0$ となる θ は $\boxed{ツ}$ 個あり，そのような θ のうちで最小のものは $\dfrac{\pi}{\boxed{テ}}$ である。

（次ページに続く）

(4)　$A=\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}$ とおく。$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{\boxed{テ}}$ の範囲で $A=-4$ を満たす θ を求めよう。

$r=\sin\theta$ とおく。p^2+q^2 を r を用いて表すと，①，②により

$$p^2+q^2=-r^2+\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$$

である。また，pq を r を用いて表すと，③により

$$pq=r^2-\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$$

である。従って，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{\boxed{テ}}$ の範囲で $A=-4$ を満たす θ は

$$\theta=\frac{\pi}{\boxed{ニ}}$$

である。

また，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{ニ}}$ のとき，p，q，r の間には大小関係 $\boxed{ヌ}$ が成り立つ。

$\boxed{ヌ}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$p<q<r$　　①　$p<r<q$　　②　$q<p<r$

③　$q<r<p$　　④　$r<p<q$　　⑤　$r<q<p$

第２講　三角関数

1 (1)　$0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$，$0\leqq\beta\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$-\frac{\pi}{2}\leqq-\alpha\leqq0$　　よって，$-\frac{\pi}{2}\leqq\beta-\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$

よって，$\beta-\alpha=\theta$ とおくと，$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

$2\cos^2(\beta-\alpha)=3\sin(\beta-\alpha)$ より，$2\cos^2\theta=3\sin\theta$　　$2(1-\sin^2\theta)=3\sin\theta$

$t=\sin(\beta-\alpha)=\sin\theta$ とおくと，$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$-1\leqq t\leqq1$

$2(1-t^2)=3t$　　$2t^2+3t-2=0$　　$(2t-1)(t+2)=0$　　よって，$t=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

つまり，$\sin\theta=\frac{1}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ より，　$\theta=\frac{\pi}{6}$　　したがって，$\beta-\alpha=\frac{\pi}{\boldsymbol{6}}$

(2)　(1)より，$\beta=\alpha+\frac{\pi}{6}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
y&=4\sin^2\beta-4\cos^2\alpha=4\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-4\cos^2\alpha\\
&=4\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)^2-4\cos^2\alpha\\
&=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2-4\cos^2\alpha\\
&=3\sin^2\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha\\
&=3(1-\cos^2\alpha)+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=\boldsymbol{3}-\boldsymbol{6}\cos^2\alpha+\boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{3}}\sin\alpha\cos\alpha
\end{aligned}
$$

よって，$y=3$，つまり $3-6\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha=3$ となるのは，

$\cos\alpha(\sqrt{3}\sin\alpha-3\cos\alpha)=0$ より，

$\cos\alpha=0$，または $\sqrt{3}\sin\alpha-3\cos\alpha=0$ のとき．

$\cos\alpha=0$ $\left(0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ を満たす α は，$\alpha=\frac{\pi}{2}$

このとき，$\beta=\frac{2}{3}\pi$ より，$0\leqq\beta\leqq\frac{\pi}{2}$ を満たさず，不適．

$\sqrt{3}\sin\alpha-3\cos\alpha=0$ より，$\sqrt{3}\sin\alpha=3\cos\alpha$　　$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{\sqrt{3}}$

つまり，$\tan\alpha=\sqrt{3}$ $\left(0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ より，$\alpha=\frac{\pi}{\boldsymbol{3}}$

このとき，$\beta=\frac{\pi}{\boldsymbol{2}}$ $\left(0\leqq\beta\leqq\frac{\pi}{2}\text{ を満たす}\right)$

(3)　$y=3-6\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha$

$$
\begin{aligned}
&=3-6\cdot\frac{1+\cos2\alpha}{2}+\sqrt{3}\sin2\alpha=\sqrt{\boldsymbol{3}}\sin2\alpha-\boldsymbol{3}\cos2\alpha\\
&=\boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{3}}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{\boldsymbol{3}}\right)
\end{aligned}
$$

$y=-\sqrt{3}$ となるのは，$-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$　　$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 \leqq 2\alpha \leqq \pi$　　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\alpha - \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{2}{3}\pi$

よって，$2\alpha - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6}$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{\mathbf{12}}$

このとき，$\beta = \dfrac{\pi}{\mathbf{4}}$ $\left(0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right.$ を満たす$\left.\right)$

2 (1) $p = \sin\left(\theta + \dfrac{2}{3}\pi\right) = \sin\theta\cos\dfrac{2}{3}\pi + \cos\theta\sin\dfrac{2}{3}\pi = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sin\theta + \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\cos\theta$

$q = \sin\left(\theta + \dfrac{4}{3}\pi\right) = \sin\theta\cos\dfrac{4}{3}\pi + \cos\theta\sin\dfrac{4}{3}\pi = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sin\theta - \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\cos\theta$

(2) $pq = \dfrac{1}{4}\sin^2\theta - \dfrac{3}{4}\cos^2\theta = \dfrac{1}{4}\sin^2\theta - \dfrac{3}{4}(1 - \sin^2\theta) = \sin^2\theta - \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

$= \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2} - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cos 2\theta - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$0 \leqq 2\theta < 4\pi$

$pq = 0$ より，$-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta - \dfrac{1}{4} = 0$　　$\cos 2\theta = -\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq 2\theta < 4\pi$ より，$2\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi,\ \dfrac{10}{3}\pi$

よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $pq = 0$ を満たす θ は $\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ の **4** 個であり，そのうち最小のものは $\theta = \dfrac{\pi}{\mathbf{3}}$ である．

(4) $r = \sin\theta$ とおくとき，

$p + q = \left(-\dfrac{1}{2}\sin\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) + \left(-\dfrac{1}{2}\sin\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) = -\sin\theta = -r$

$pq = \sin^2\theta - \dfrac{3}{4} = r^2 - \dfrac{3}{4}$

よって，$p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = (-r)^2 - 2\left(r^2 - \dfrac{3}{4}\right) = -r^2 + \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

このとき，$A = \dfrac{q}{p} + \dfrac{p}{q} = \dfrac{p^2 + q^2}{pq} = \dfrac{-r^2 + \dfrac{3}{2}}{r^2 - \dfrac{3}{4}}$ より，

$$A = -4 \iff \dfrac{-r^2 + \dfrac{3}{2}}{r^2 - \dfrac{3}{4}} = -4 \iff -r^2 + \dfrac{3}{2} = -4\left(r^2 - \dfrac{3}{4}\right)$$

$r^2 = \dfrac{1}{2}$　　$r = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　つまり　$\sin\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$ より，$\theta = \dfrac{\pi}{\mathbf{4}}$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$p=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\sin\dfrac{11}{12}\pi$

$\dfrac{5}{6}\pi<\dfrac{11}{12}\pi<\pi$ より，$0<p<\dfrac{1}{2}$

$q=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4}{3}\pi\right)=\sin\dfrac{19}{12}\pi$

$\dfrac{3}{2}\pi<\dfrac{19}{12}\pi<\dfrac{5}{3}\pi$ より，$-1<q<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$r=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，$q<p<r$　（②）